

Une marche aléatoire en milieu aléatoire :
La marche de Sinai

Alban Goupil-Papa et Corentin Morandea

TER dans le cadre du Master Mathématiques Fondamentales
et Appliquées de l'Université Paris-Sud, première année.

Sous la direction de Pascal Maillard.

Année 2014-15.

Table des matières

Introduction	3
0.1 Les différentes Marches Aléatoires	3
0.2 Comportements des Marches	4
0.3 Sage est notre ami	8
1 Chaîne de naissance et mort	13
2 Comportement de la marche aux infinis	16
3 Résultat faible de Sinai	20

Table des figures

1 Marche Aléatoire Simple sur \mathbb{Z}	9
2 Marche Aléatoire Simple sur \mathbb{Z}^2	9
3 Marche Aléatoire Simple sur \mathbb{Z}^3	10
4 MAMA et une enveloppe en $\ln(n)^2$	10
5 Comparaison entre les deux marches aléatoires	11
6 Le temps local (en haut) d'une MAMA au-dessus du potentiel du milieu correspondant	12
7 Le temps local d'une MAMA au dessus du potentiel d'un milieu qui favorise la droite	12

Introduction

0.1 Les différentes Marches Aléatoires

Les origines de la notion de *marche aléatoire* remontent au début du XXe siècle (voir [6]). C'est Karl Pearson qui l'introduisit : il voulait la réponse au problème suivant. Un homme part d'un certain point, noté O . Il parcourt une certaine unité de distance en ligne droite, puis tourne d'un angle quelconque, parcourt cette distance, et ainsi de suite. Quel est alors la probabilité qu'il se trouve à une certaine distance de O , après n étapes ? Lord Rayleigh apporta la réponse et plus tard, George Pòlya lui donna son nom, en allemand : "Irrfahrt", littéralement "errance".

En toute généralité, une marche aléatoire décrit un mouvement dans un milieu donné : ce peut être sur \mathbb{Z} , sur \mathbb{Z}^2 , \mathbb{Z}^n , sur un graphe... Elle possède un caractère Markovien, c'est-à-dire que le mouvement ne dépend que de l'instant présent, et non pas du passé. C'est pour cette raison que l'on parle du "marcheur ivre", pour une marche aléatoire sur \mathbb{Z} : un homme ivre sort du bar, et commence à marcher, dans une rue infinie, bordée de lampadaires à intervalles réguliers. À chaque lampadaire atteint, l'homme, l'esprit embrumé par l'alcool, ne sait plus d'où il vient, et choisit aléatoirement le futur lampadaire, quitte à rester sur place le temps de réfléchir. Dans un article, Bruno Schapira [3] emploie l'expression de "conducteur ivre" pour une marche aléatoire particulière dans \mathbb{Z}^2 : le conducteur se balade dans Manhattan et choisit aléatoirement une rue parmi celles qui ne sont pas en sens unique à chaque croisement, ce qui en fait deux sur quatre, et l'orientation des rues change une fois sur deux.

Les marches aléatoires sont utilisées dans d'autres domaines que les mathématiques - Pearson était un biostatisticien - comme la physique, la biologie, l'informatique... Brown, puis Einstein, ont décrit le mouvement d'une particule dans un fluide, soumise au choc de ses voisines, par le *mouvement brownien*, compris grâce aux marches aléatoires. Le moteur de recherche Google est un autre exemple de leur utilisation, pour parcourir, identifier et classer les pages du réseau internet.

Cependant, cet objet a ses limites. Imaginons qu'on veuille modéliser le mouvement d'un mobile dans un milieu inhomogène. On ne veut pas forcément une description exacte du milieu, et ce n'est d'ailleurs pas toujours envisageable. Pour un physicien, il sera intéressant de modéliser le milieu par les propriétés de la famille à laquelle il appartient : on ne veut pas la structure exacte du cristal, mais plutôt les caractéristiques statistiques de la structure d'un cristal. On va alors parler de *milieu aléatoire*.

La marche aléatoire en milieu aléatoire (**MAMA**) décrit donc un mouve-

ment markovien dans un milieu qu'on ne connaît que par ses caractéristiques moyennes. En pratique, pour réaliser une **MAMA**, on tire d'abord le milieu aléatoire, puis on lance la marche aléatoire dans ce milieu. L'ordre est important. En effet, si on démarre la marche et qu'on tire le milieu au fur et à mesure de son avancée, cela revient à réaliser une marche aléatoire en milieu déterminé, sauf qu'on le découvre pas à pas. Perdu ? Reprenons l'exemple du marcheur ivre. Celui-ci a décidément trop bu, et est en proie à des hallucinations. Chaque lampadaire peut lui faire peur ou le rassurer, mais sans trop de raisons. Il faut imaginer qu'un même lampadaire aura toujours le même effet. Lorsqu'il rencontre un lampadaire effrayant, il a de grandes chances de rebrousser chemin. Lorsqu'il rencontre un lampadaire rassurant, il a plus de chances d'y rester ou de continuer son chemin. Rappelons qu'à chaque fois qu'il arrive à un lampadaire, il a oublié d'où il venait. La mauvaise manière de procéder serait de décider à chaque fois qu'il rencontre un lampadaire si celui-ci l'effraie ou non.

0.2 Comportements des Marches

L'étude des marches aléatoires se fait généralement autour des deux grands axes suivants :

- la marche que l'on étudie est-elle récurrente ou transiente, c'est-à-dire repasse-t-elle par son point de départ presque sûrement ou non ?
- au bout de n pas, de quelle distance la marche s'est-elle éloignée de son point de départ ?

Pour la *marche aléatoire simple* (**MAS**), le résultat est bien connu. Le lecteur pourra se référer à [2] pour plus de détails. Formalisons un peu le problème.

On se donne une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$, d'espérance nulle. Chacun des X_i correspond à un pas de la marche. On pose maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Les S_n représentent la position de la marche. Si X_1 est à valeurs dans \mathbb{Z} , on sait que la marche sera récurrente : S_n ira alternativement vers $+\infty$ et vers $-\infty$. La marche sera aussi récurrente dans \mathbb{Z}^2 . Autrement dit, le marcheur et le conducteur ivre se retrouveront au bout d'un certain temps avec grande probabilité à leur point de départ. D'où la citation suivante de Pearson : " La leçon de la solution de Lord Rayleigh est que, dans un pays ouvert, l'endroit le plus probable pour trouver un ivrogne encore capable de tenir sur ses pieds se trouve quelque part dans le voisinage de son point de départ. ". En revanche, dans les dimensions supérieures, la marche sera transiente : une fusée ivre se perdra dans l'espace.

Quand au second grand axe d'étude, sur une **MAS** telle que ci-dessus, le

théorème central limite nous dit qu'elle s'éloigne en \sqrt{n} de l'origine. Plus précisément, on a que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_1)).$$

Venons-en à la **MAMA**. Le but sera de retrouver deux théorèmes. Le premier donnera des critères de récurrence et est dû à Solomon. Le deuxième donnera la vitesse de dérive de la **MAMA** et est dû à Sinai. Avant d'aller plus loin, nous allons devoir formaliser ce qu'est une **MAMA**, et donner le cadre dans lequel nous l'étudierons. L'étude des **MAMA** est bien plus complexe que celle des marches aléatoires habituelles, nous nous placerons donc dans \mathbb{Z} . Nous allons définir ce qu'est un *milieu*, puis les ensembles de probabilités que nous serons amenés à côtoyer.

Un *milieu* ω est défini par $\omega = (\omega_i^-, \omega_i^0, \omega_i^+)_{i \in \mathbb{Z}} = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Le triplet (ω_i) est appelé *loi de transition en i* . Il décrit les probabilités respectives d'aller à gauche, de ne pas bouger ou d'aller à droite. Notre marche sera donc cantonnée à rester sur place ou à faire des pas de longueur 1. Nous noterons aussi $\omega_z(y)$ la probabilité d'aller de z à y . On définit alors l'ensemble des milieux :

$$\Omega = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid \omega_i^- + \omega_i^0 + \omega_i^+ = 1\}.$$

L'espace Ω est un espace polonais, car on peut le voir comme l'espace produit sur \mathbb{Z} des ensembles des lois de transition. Il sera muni de sa topologie produit, et on le munit de sa tribu borélienne, notée \mathcal{F} . Il faut maintenant définir une probabilité \mathfrak{P} sur Ω . Rappelons qu'en effet, pour étudier une **MAMA**, la façon dont sont tirés les ensembles compte autant que la réalisation de la marche une fois le milieu tiré. Nous allons faire une première hypothèse, qui semble assez réductrice :

Hypothèse 1 : Les ω_i sont indépendants et de même loi.

Il suffira donc de donner la loi du point de départ de la marche, ω_0 . Cette hypothèse est en fait raisonnable : elle dit que les irrégularités du milieu ne dépendront pas de là où elles se situent dans le milieu, elles sont équidistribuées. Cela signifie pour le marcheur ivre que chaque lampadaire aura autant de chances de lui faire peur, et que l'hallucination due à un tel lampadaire n'influencera pas celle provoquée par un autre lampadaire.

Une deuxième hypothèse nous permettra d'éliminer certains cas peu intéressants :

Hypothèse 2 : $\forall i \in \mathbb{Z}, \omega_i^- \neq 0$ et $\omega_i^+ \neq 0$ \mathfrak{P} - *p.s.*.

Nous rejetons donc les milieux qui permettraient à la marche de rester immobile, ou de ne pas pouvoir accéder à un ensemble de points. Nous avons donc un espace de probabilité qui est l'espace des milieux $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{P})$.

Pour tout milieu ω , définissons maintenant la *marche aléatoire dans le milieu ω* : ce sera la chaîne de Markov de matrice de transition $Q(z, y) = \omega_z(y)$. Grâce à la première hypothèse, nous pouvons choisir 0 comme point de départ de la marche. Prenons comme espace de probabilité $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\omega^0)$, où \mathcal{G} est la plus petite tribu rendant les fonction coordonnées mesurables. L'espace des trajectoires est modélisé par $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et \mathbb{P}_ω^0 est la loi de la marche aléatoire dans le milieu ω en partant de 0. Autrement dit, nous avons que $\mathbb{P}_\omega(X_{n+1} = y \mid X_n = z) = \omega_z(y)$.

Nous avons donc introduit une loi sur l'ensemble des milieux, puis la loi de la marche particulière au milieu. Il ne reste plus qu'à définir un espace de probabilité sur ces deux concepts réunis ! L'espace que l'on mesurera sera $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$. Munissons-le de sa probabilité naturelle $\mathbb{P}^0 = \mathfrak{P} \times \mathbb{P}_\omega^0$. Plus formellement, si $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{P}^0(F \times G) = \int_F \mathbb{P}_\omega^0(G) d\mathfrak{P}(\omega).$$

C'est en accord avec ce que nous avons dit jusque-là sur les **MAMA** : on regarde la probabilité particulière pour chaque milieu ω de F , puis on intègre sur F . Le milieu est d'abord choisi, puis la marche est lancée. Nous avons donc une probabilité qui donne des renseignements en toute généralité sur une **MAMA** : à partir de conditions sur le milieu et sur la trajectoire, on arrive à calculer la probabilité de ce couplage d'évènements. Ce qui nous intéressera principalement sera cependant ce qui arrive à la marche aléatoire sans aucune restriction sur le milieu. Nous définissons donc la loi marginale sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de la probabilité précédente, que nous notons \mathbb{P}^0 comme la précédente :

$$\mathbb{P}^0(G) = \int_\Omega \mathbb{P}_\omega^0(G) d\mathfrak{P}(\omega).$$

Nous avons maintenant tous les outils pour pouvoir étudier ce qui arrivera à une marche aléatoire s'aventurant en milieux inconnus... Une dernière remarque : l'étude du comportement de la **MAMA** se fera en fonction de \mathfrak{P} , la seule probabilité que nous avons laissée presque libre -deux hypothèses ont été faites-, et à partir de laquelle les autres probabilités sont définies.

Notre travail s'effectuera en trois parties.

Nous étudierons tout d'abord les *chaînes de naissance et mort*. Ce sont des chaînes de Markov sur \mathbb{Z} ne pouvant pas faire de pas de longueur supérieure à 1, qui évoluent dans un milieu déjà tiré. Ce ne sont donc pas des **MAMA** ! Le milieu ω sera fixé. Le but de la partie sera d'établir un critère de récurrence

pour ces marches. Introduisons quelques notations :

$$\rho_i = \frac{\omega_i^-}{\omega_i^+} \quad \text{et} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \rho_1 \cdots \rho_x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\rho_x \cdots \rho_0} & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Le théorème final sera le suivant :

Théorème . *Soit, pour $x > 0$, $S_x(\omega) = \sum_{y=1}^x \gamma(y)$ et pour $x < 0$, $F_x(\omega) = \sum_{y=x}^{-1} \gamma(y)$. Alors, en notant*

$$S(\omega) := \lim_{x \rightarrow \infty} S_x(\omega)$$

et

$$F(\omega) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(\omega),$$

on a :

1. Si $S(\omega) < \infty$ et $F(\omega) = \infty$ alors $X_n \rightarrow +\infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.
2. Si $F(\omega) < \infty$ et $S(\omega) = \infty$ alors $X_n \rightarrow -\infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.
3. Si $S(\omega) = \infty$ et $F(\omega) = \infty$ alors $\limsup X_n = +\infty$ et $\liminf X_n = -\infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.

À partir de ce résultat, nous en déduisons dans la deuxième partie un critère de récurrence pour les **MAMA**, grâce au travail de Solomon [5] :

Corollaire 1. *Supposons qu'on a défini $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] \in \bar{R}$. Alors :*

1. Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] < 0$ alors $X_n \rightarrow +\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.
2. Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] > 0$ alors $X_n \rightarrow -\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.
3. Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] = 0$ alors $\limsup X_n = +\infty$ et $\liminf X_n = -\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.

Remarquons que l'espérance est prise sous \mathfrak{P} : la récurrence de la **MAMA** dépend totalement de cette probabilité.

Une fois ce critère établi, nous chercherons à répondre au problème du deuxième grand axe, en retrouvant un résultat du à Sinaiï. Nous nous placerons dans le cadre d'une **MAMA** récurrente, et montrerons le *résultat faible de Sinaiï* (voir [4]) :

Théorème (Résultat faible de Sinaiï). *Supposons que $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] = 0$ et que $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)^2] < \infty$. Alors,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0, \quad \mathbb{P}^0 \left(|X_n| > \frac{\ln(n)^2}{\delta} \right) < \varepsilon.$$

Nous obtiendrons ce dernier résultat en introduisant la notion de *potentiel* du milieu V . En tout point, le potentiel traduira la facilité ou la difficulté pour la marche de passer ce point. Si nous nous représentons le milieu sur \mathbb{Z} comme une chaîne de montagne, le potentiel caractérisera la pente en chaque point ! La marche aura plus de mal à gravir une côte qu'à se laisser glisser jusqu'au fond de la vallée. Pour le marcheur ivre, le potentiel d'un lampadaire caractérisera à quel point celui-ci est effrayant : beaucoup trop pour aller plus loin ou non ? Grâce à cette notion, nous avons répondu à la question initiale de la distance atteinte par une marche, dans le cas récurrent : elle sera de l'ordre de $\ln(n)^2$.

0.3 Sage est notre ami

Nous savons maintenant ce que nous allons étudier, et les résultats que nous allons devoir démontrer. Cependant, avant de nous lancer au coeur du sujet, nous allons utiliser l'outil informatique afin de vérifier expérimentalement les résultats annoncés, et aussi pour permettre une meilleure vision des objets auxquels nous serons confrontés. Pour cela, nous utiliserons le logiciel de calcul formel *SAGE*, qui utilise le langage Python. Nous montrerons ici seulement les résultats, le code sera donné en annexe pour les lecteurs intéressés.

Commençons par la **MAS** sur \mathbb{Z}^n . Le résultat annoncé est que cette marche est récurrente pour $n \in \{1, 2\}$, mais pas pour $n = 3$.

Le résultat est visible en dimension 1, sur la figure 1, mais il serait nécessaire de simuler beaucoup plus de pas pour rendre compte de la récurrence ou de la transience en dimension supérieure !

La figure 4 représente une **MAMA**, en bleu, avec une enveloppe de $\ln(n)^2$. Nous ne simulerons que le cas de la dimension 1, le seul que nous étudierons. D'ailleurs, le cas de la récurrence de la **MAMA** en dimension 2 reste une question ouverte ! Le lecteur qui s'intéressera au code remarquera que le milieu est défini avant de lancer la marche dans celui-ci, en accord avec nos précédentes remarques. La récurrence de la **MAMA** est ici aussi visible : elle repasse régulièrement par 0, son point de départ.

FIGURE 1 – Marche Aléatoire Simple sur \mathbb{Z}

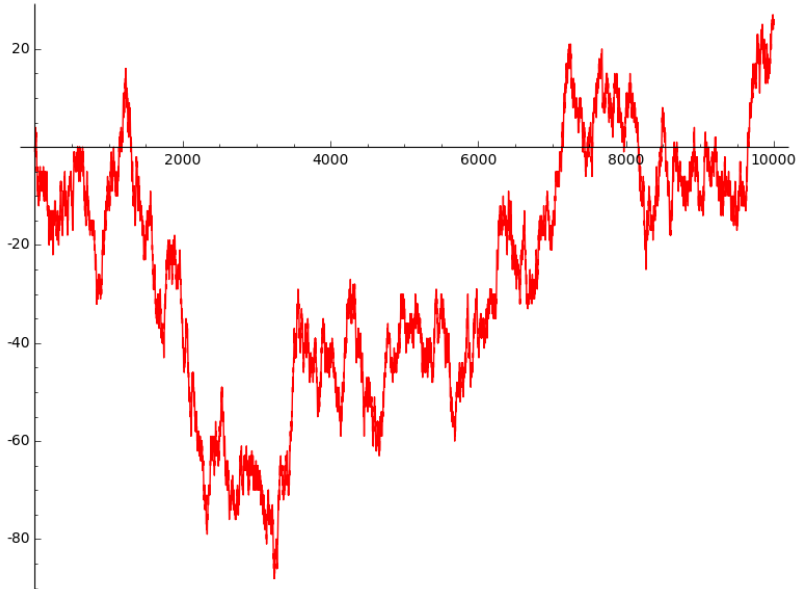


FIGURE 2 – Marche Aléatoire Simple sur \mathbb{Z}^2

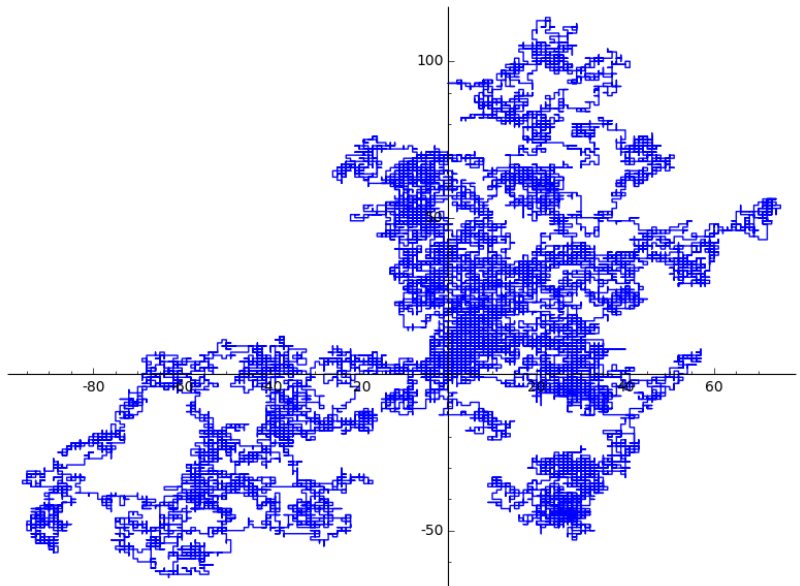


FIGURE 3 – Marche Aléatoire Simple sur \mathbb{Z}^3

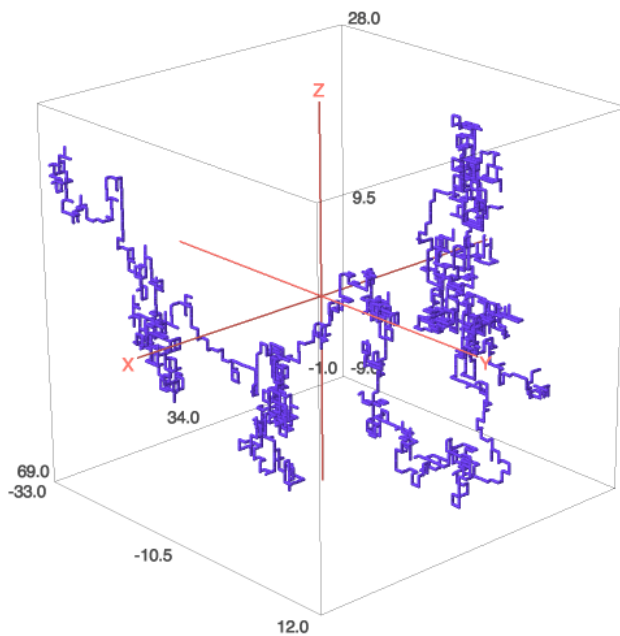
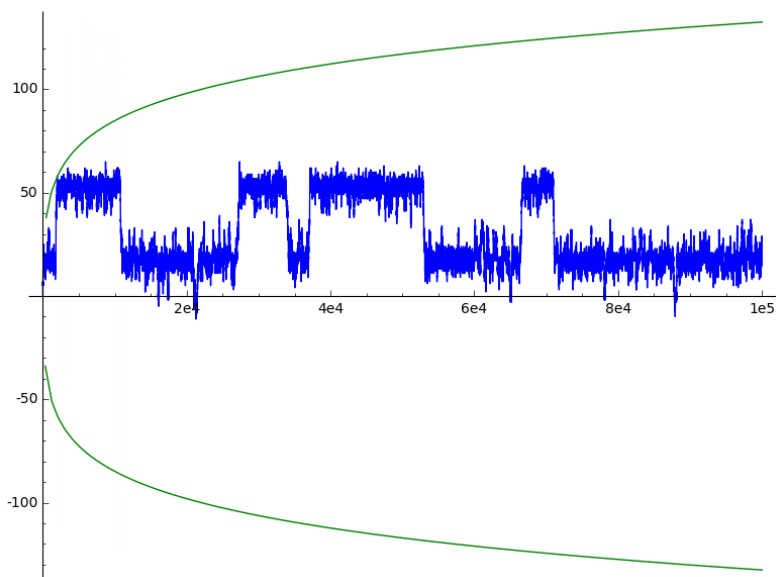
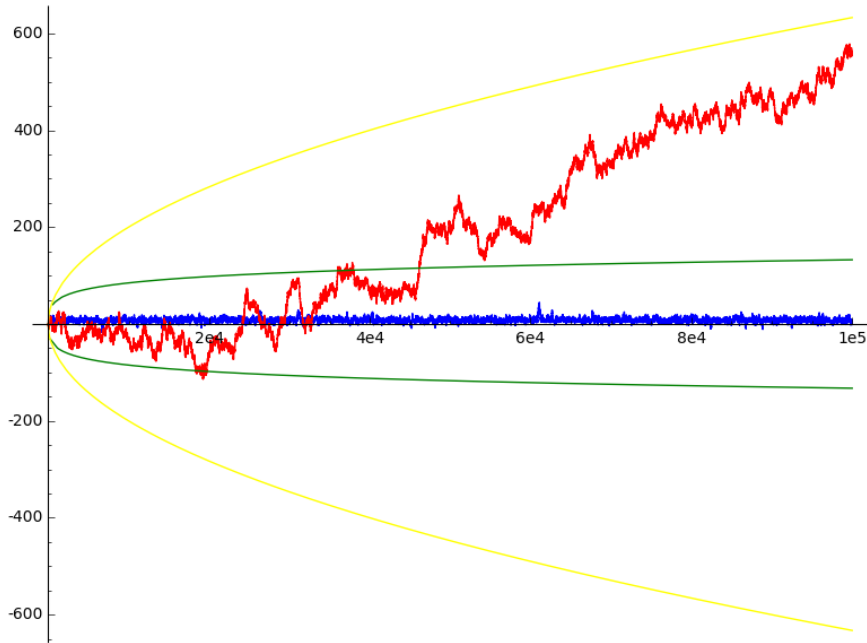


FIGURE 4 – MAMA et une enveloppe en $\ln(n)^2$



Qu'en est-il de la vitesse de dérive? La figure 5 montre sur le même graphique une **MAS**, en rouge, une **MAMA** en bleu, une enveloppe en \sqrt{n} en jaune, une enveloppe en $\ln(n)^2$ en vert. La vitesse supérieure de la **MAS** à la **MAMA** est parfaitement visible, de même que l'ordre de grandeur de leurs vitesses respectives.

FIGURE 5 – Comparaison entre les deux marches aléatoires



Les différents résultats annoncés semblent donc raisonnables. La dernière partie de la section simulation va maintenant présenter l'outil qui permettra de démontrer le résultat faible de Sinai : le potentiel.

Sur les deux figures, le potentiel est la courbe du dessous. L'autre courbe représente les occurrences de la **MAMA** en chaque point. Sur la figure 6, le potentiel a une chance sur deux de descendre ou de monter : le milieu ne favorise aucune direction. Si l'on se réfère au corollaire précédemment énoncé, on se trouve dans le cas $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\ln(\rho_0)] = 0$, c'est-à-dire le cas de récurrence de la marche. Nous avons lancé la marche pour 100000 pas. On remarque que la marche est concentrée dans les creux du potentiel.

Sur la figure 7, le potentiel a 6 chances sur 10 de pencher à droite, la marche a 2 chances sur 3 de descendre une pente plutôt que de la monter. La marche a fait ici 100000 pas. Elle se dirige essentiellement vers la droite. Les pics d'occurrences correspondent à des endroits où la marche s'est retrouvée coincée, mais elle continue son odyssée dans la direction favorisée, la droite.

FIGURE 6 – Le temps local (en haut) d'une **MAMA** au-dessus du potentiel du milieu correspondant

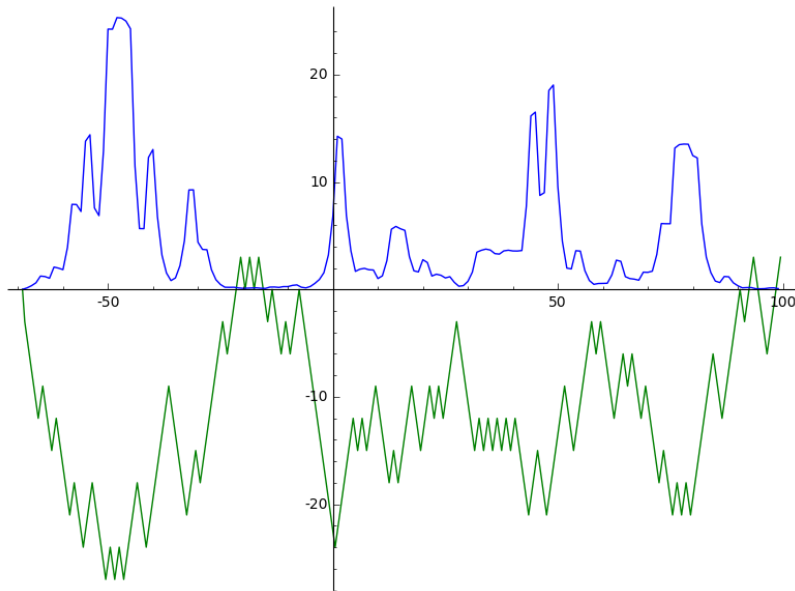
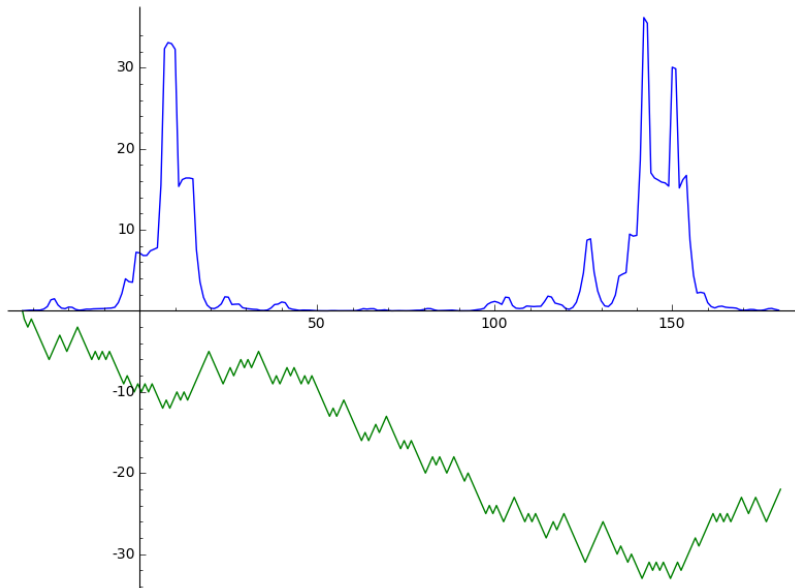


FIGURE 7 – Le temps local d'une **MAMA** au dessus du potentiel d'un milieu qui favorise la droite



1 Chaîne de naissance et mort

Dans cette partie, le milieu ω sera fixé.

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à espace d'état \mathbb{Z} , telle que :

$$\mathbb{P}_\omega(X_{n+1} = i | X_n = j) = \begin{cases} \omega_j^+ & \text{si } i = j + 1 \\ \omega_j^- & \text{si } i + 1 = j \\ \omega_i^0 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\forall i \in \mathbb{Z}, (\omega_i^-, \omega_i^0, \omega_i^+) \in [0, 1]^3$ et $\omega_i^- + \omega_i^0 + \omega_i^+ = 1$. On notera $\rho_i = \frac{\omega_i^-}{\omega_i^+}$.

Sa matrice de transition est alors :

$$Q = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{-1}^- & \omega_{-1}^0 & \omega_{-1}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^- & \omega_0^0 & \omega_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1^- & \omega_1^0 & \omega_1^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous allons faire une première hypothèse sur cette chaîne, qui entraînera l'irréductibilité de celle-ci.

Hypothèse : $\forall i \in \mathbb{Z}, \omega_i^+ \neq 0$ et $\omega_i^- \neq 0$.

C'est même une condition équivalente à l'irréductibilité de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, si l'hypothèse est vérifiée, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'état i et l'état $i + 1$ communiquent. Par transitivité, tous les états communiquent entre eux : la chaîne est irréductible. Maintenant, si l'hypothèse n'est pas vérifiée : il y a soit un ω_i^- , soit un ω_i^+ qui est nul. Supposons $\omega_i^+ = 0$. Alors $Q(i, i + 1) = 0$, ce qui implique, comme on ne peut pas faire de saut de longueur plus grande que 1, que $\forall j \leq i, Q(j, i + 1) = 0$. Donc les états de $-\infty$ à i ne communiquent pas avec les états à partir de $i + 1$: la chaîne n'est pas irréductible. De la même manière, si $\omega_i^- = 0$, on montre que la chaîne n'est pas irréductible. Sous cette hypothèse, nous pouvons maintenant poser, $\forall i \in \mathbb{Z}$,

$$\tau_i = \inf\{n \geq 0 | X_n = i\} \quad \text{et} \quad T_i = \inf\{n > 0 | X_n = i\}.$$

De plus, étant donnés trois états a, b et x tels que $a \leq x \leq b$, on pose

$$u(x) = \mathbb{P}_\omega^x(\tau_a < \tau_b) \quad \text{et} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \rho_1 \cdots \rho_x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\rho_x \cdots \rho_0} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Considérons $a < x < b$. Comme $u(x)$ est la probabilité que la chaîne atteigne l'état a pour la première fois avant l'état b en partant de l'état x , nous avons que $u(a) = 1$ et $u(b) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{y \in \{x-1, x, x+1\}} \mathbb{P}_\omega^x(\tau_a < \tau_b, X_1 = y), \\
&= \sum_{y \in \{x-1, x, x+1\}} \mathbb{P}_\omega^x(\tau_a < \tau_b | X_1 = y) \mathbb{P}_x(X_1 = y), \\
&= \sum_{y \in \{x-1, x, x+1\}} \mathbb{E}_\omega^x[\mathbf{1}_{\tau_a < \tau_b} | X_1 = y] \mathbb{P}_x(X_1 = y), \\
&= \sum_{y \in \{x-1, x, x+1\}} \mathbb{E}_\omega^y[\mathbf{1}_{\tau_a < \tau_b}] \mathbb{P}_x(X_1 = y), \\
&= \sum_{y \in \{x-1, x, x+1\}} \mathbb{P}_\omega^y(\tau_a < \tau_b) \mathbb{P}_x(X_1 = y), \\
&= \sum_{y \in \{x-1, x, x+1\}} u(y) \mathbb{P}_\omega^x(X_1 = y).
\end{aligned}$$

Le passage de la troisième à la quatrième ligne s'explique par la propriété de Markov forte. Cela donne finalement que

$$u(x) = \sum_{y \in \{x-1, x, x+1\}} u(y) Q(x, y),$$

puis que

$$u(x) = \omega_x^- u(x-1) + \omega_x^0 u(x) + \omega_x^+ u(x+1). \quad (1)$$

Ensuite, comme $\omega_x^- + \omega_x^0 + \omega_x^+ = 1$, en utilisant l'équation (1), on obtient que :

$$u(x) - u(x-1) = \frac{\omega_x^+}{\omega_x^-} (u(x+1) - u(x)).$$

Par récurrence, on trouve que

$$u(x+1) - u(x) = \frac{\gamma(x)}{\gamma(a)} (u(a+1) - u(a)), \quad (2)$$

puis, comme $u(a) = 1$ et $u(b) = 0$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
-1 &= u(b) - u(a) \\
&= \sum_{x=a}^{b-1} u(x+1) - u(x) \\
&= \sum_{x=a}^{b-1} \frac{\gamma(x)}{\gamma(a)} (u(a+1) - u(a)), \quad \text{par (2)}.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$u(a) - u(a+1) = \frac{1}{\sum_{x=a}^{b-1} \frac{\gamma(x)}{\gamma(a)}}. \quad (3)$$

On en déduit que :

$$u(x+1) = u(x) - \frac{\gamma(x)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)}. \quad (4)$$

Par (4) et une récurrence immédiate, on obtient que :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(a) - \sum_{z=a}^{x-1} \frac{\gamma(z)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)} \\ &= 1 - \frac{\sum_{z=a}^{x-1} \gamma(z)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)} \\ &= \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma(y)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)}. \end{aligned} \quad (5)$$

En particulier, si $\forall x > 0$, $\omega_x^- = \omega_x^+$, alors $\gamma(x) = 1$ et $u(x) = \frac{b-x}{b-a}$.

Le résultat suivant, dû à Solomon [5], donne un critère de récurrence/transience :

Théorème 1. *Soit, pour $x > 0$, $S_x(\omega) = \sum_{y=1}^x \gamma(y)$ et pour $x < 0$, $F_x(\omega) = \sum_{y=x}^{-1} \gamma(y)$. Alors, si*

$$S(\omega) := \lim_{x \rightarrow +\infty} S_x(\omega)$$

et

$$F(\omega) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(\omega)$$

existent :

1. Si $S(\omega) < \infty$ et $F(\omega) = \infty$ alors $X_n \rightarrow +\infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.
2. Si $F(\omega) < \infty$ et $S(\omega) = \infty$ alors $X_n \rightarrow -\infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.
3. Si $S(\omega) = \infty$ et $F(\omega) = \infty$ alors $\limsup X_n = +\infty$ et $\liminf X_n = -\infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.

Démonstration. Rappelons que, par (5),

$$u_{a,b}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma(y)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)} \quad \text{avec} \quad \gamma(y) = \begin{cases} \rho_1 \cdots \rho_y & \text{si } y > 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \\ \frac{1}{\rho_y \cdots \rho_0} & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

A présent, remarquons que $\mathbb{P}_\omega^1(\tau_{-\infty} < \tau_\infty) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} u(1) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + F(\omega)}$.
On conjecture que la finité de $S(\omega)$ et l'infinité de $F(\omega)$ impliquent que $X_n \rightarrow \infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s. Fournissons une preuve à ce fait.
Soit $\varepsilon > 0$, montrons que on a $\mathbb{P}_\omega^0(T_{-k} = \infty) > 1 - \varepsilon$, pour k suffisamment grand. Pour cela, on calcule :

$$\mathbb{P}_\omega^0(T_{-k} = \infty) = \mathbb{P}_\omega^0(\lim_{l \rightarrow \infty} T_{-k} > T_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\omega^0(T_{-k} > T_l) = 1 - u_{-k, \infty}(0).$$

Or $u_{-k, \infty}(0) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + (F(\omega) - \sum_{y=-k-1}^{-\infty} \gamma(y))}$: il suffit de prendre k suffisamment grand pour que $u_{-k, \infty}(0) < \varepsilon$ et on a bien $\mathbb{P}_\omega^0(T_{-k} = \infty) > 1 - \varepsilon$.

Cela signifie que le point $-k$ est transitoire. La chaîne étant irréductible, cela implique que toute la chaîne est transitoire. Finalement, notons

$$A_k = \{T_{-k} = \infty, X_n \rightarrow \infty\} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} A_{k, l}$$

où $A_{k, l} = \{T_{-k} = \infty, \sum_{x=-k}^l N_x < \infty\}$ et où N_x est le nombre de passages de la chaîne en un point x . On a pour tout entier l que $\mathbb{P}_\omega^0(\sum_{x=-k}^l N_x < \infty) = 1$. En conclusion, $\mathbb{P}_\omega^0(A_{k, l}) > 1 - \varepsilon$ implique $P(A_k) > 1 - \varepsilon$. On a bien $X_n \rightarrow \infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.

Une preuve symétrique montre que si $S(\omega) = \infty$ et $F(\omega) < \infty$, alors $X_n \rightarrow \infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s.

Pour montrer le dernier point du théorème, on calcule :

$$\mathbb{P}_\omega^1(T_0 < \infty) = \mathbb{P}_\omega^1(\lim_{k \rightarrow \infty} \{T_0 < T_k\}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} u_{0, k}(1) = 1,$$

$$\text{car } \lim_{k \rightarrow \infty} u_{0, k}(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k-1} \gamma(i)}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} \gamma(i)} = \frac{S(\omega) - \gamma(0)}{S(\omega)} = 1, \text{ puisque } S(\omega) = \infty.$$

De même avec $\mathbb{P}_\omega^{-1}(T_0 < \infty)$.

Donc la chaîne est récurrente et on a $\limsup X_n = \infty$ et $\liminf X_n = -\infty$ \mathbb{P}_ω^0 -p.s. en conséquence. □

2 Comportement de la marche aux infinis

Dans la partie précédente, la probabilité de faire un pas dans une direction est fixée, pour chaque état. À partir de maintenant, nous allons utiliser la notion de milieu aléatoire, mise en place pendant l'introduction. Rappelons

tout de même deux hypothèses sous lesquelles nous travaillerons par la suite :

Hypothèse 1 : Les ω_i sont indépendants et de même loi.

Hypothèse 2 : $\forall i \in \mathbb{Z}, \omega_i^- \neq 0$ et $\omega_i^+ \neq 0$ \mathfrak{P} - p.s..

La première hypothèse peut être interprétée comme une demande d'une certaine homogénéité de notre milieu. S'il est irrégulier, ses irrégularités ne doivent pas être concentrées en certains endroits. La deuxième hypothèse est là pour empêcher que la marche s'arrête en un point ou que la progression de celle-ci soit bloquée.

Nous allons maintenant donner un critère qui caractérisera le comportement de la marche $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'infini. Nous allons prouver tout d'abord un lemme technique, qui permettra d'arriver à un résultat sur la récurrence ou la transience de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 2. *Soit, pour $x > 0$, $S_x(\omega) = \sum_{y=1}^x \gamma(y)$ et pour $x < 0$, $F_x(\omega) = \sum_{y=x}^{-1} \gamma(y)$. Alors, si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)]$ existe,*

$$S(\omega) := \lim_{x \rightarrow \infty} S_x(\omega)$$

et

$$F(\omega) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(\omega)$$

existent et :

1. Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] < 0$ alors $S(\omega) < \infty$ et $F(\omega) = \infty$.
2. Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] > 0$ alors $F(\omega) < \infty$ et $S(\omega) = \infty$.
3. Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] = 0$ alors $S(\omega) = \infty$ et $F(\omega) = \infty$.

Démonstration. Remarquons que $\gamma(x) = \prod_{j=1}^x \rho_j = \exp(\sum_{j=1}^x \ln(\rho_j))$.

Supposons que $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] < 0$. Par la loi des grands nombres,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{j=1}^x \ln(\rho_j) = \mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)].$$

Donc, si x est suffisamment grand, $\gamma(x) \leq \exp\left(\frac{x \cdot \mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)]}{2}\right)$. Puisque $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] < 0$, on peut majorer par une somme géométrique convergente :

$$S(\omega) = O\left(\sum_{y=0}^{\infty} \exp\left(\frac{y \cdot \mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)]}{2}\right)\right) = O\left(\left(1 - \exp\left(\frac{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)]}{2}\right)\right)^{-1}\right).$$

De plus, par le même argument, on peut minorer $F(\omega)$ par une somme géométrique qui tend vers l'infini et on a $F(\omega) = \infty$. Donc $S(\omega) < \infty$ et $F(\omega) = \infty$ p.s..

Lorsque $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] > 0$, une preuve symétrique montre que $F(\omega) < \infty$ et $S(\omega) = \infty$ p.s..

Lorsque $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] = 0$, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., telles que $\mathbb{E}[X_0] = 0$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors :

$$\limsup (S_i) = +\infty$$

et

$$\liminf (S_i) = -\infty.$$

On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $X_i = \ln(\rho_i)$. Alors on a que $S(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{S_i}$. Le premier point du lemme 3 implique que $S(\omega) = \infty$. De même, on obtient que $F(\omega) = \infty$. Voilà qui conclut la preuve du lemme 2. \square

Reste à démontrer le lemme intermédiaire. Cette preuve est inspirée de celle de S. Resnick [2], page 563.

Démonstration. Notons

$$\begin{aligned} M_{\infty} &= \max_{j \geq 1} S_j, \\ N &= \inf \{n \geq 1, S_n > 0\} \\ \bar{N} &= \inf \{n \geq 1, S_n \leq 0\}. \end{aligned}$$

Supposons que $q = \mathbb{P}(N = \infty) > 0$.

$$\begin{aligned}
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\inf\{j \geq 0, S_j = M_{\infty}\} = n) \\
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_j < S_n, 0 \leq j < n, S_k \leq S_n, k > n) \\
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\sum_{i=j+1}^n X_i > 0, 0 \leq j < n\} \cap \{\sum_{i=n+1}^k X_i \leq 0, k > n\}) \\
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=j+1}^n X_i > 0, 0 \leq j < n) \mathbb{P}(\sum_{i=n+1}^k X_i \leq 0, k > n) \\
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > 0, X_n + X_{n-1} > 0, \dots, \sum_{i=1}^n X_i > 0) \mathbb{P}(S_j \leq 0, j \geq 0) \\
1 &\geq \mathbb{P}(X_1 > 0, X_1 + X_2 > 0, \dots, S_n > 0) \mathbb{P}(N = \infty) \\
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\bar{N} > n)q \\
1 &\geq \mathbb{E}[\bar{N}q]
\end{aligned}$$

Ici on a $q > 0$ donc $E[\bar{N}] < \infty$.

Par la formule de Wald (une conséquence du théorème d'arrêt),

$$\mathbb{E}[S_{\bar{N}}] = \mathbb{E}[\bar{N}] \mathbb{E}[X_1] = 0.$$

Comme $S_{\bar{N}} \leq 0$, on a $S_{\bar{N}} = 0$, ce qui est absurde car si $\mathbb{E}[X_1] = 0$, on a $\mathbb{P}(S_{\bar{N}} < 0) \geq \mathbb{P}(X_1 < 0) > 0$. Donc $q=0$ alors qu'on avait supposé $q>0$ au début de la preuve, c'est absurde. Donc $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$. Ainsi, $N < \infty$ p.s. donc l'événement $S_N > 0$ a un sens. Si $\mathbb{E}[S_N] = 0$ on a $S_N = 0$ p.s., ce qui contredit la définition de N . Donc $\mathbb{E}[S_N] > 0$ par positivité de S_N .

Notons $N(0) = 0$, $N(1) = N$ et pour tout $k \geq 2$, $N(k)$ le temps d'arrêt défini de la même façon que N sur la marche tronquée $\{X_{N(k-1)+1}, X_{N(k-1)+2}, \dots\}$. Les $(S_{N(k)} - S_{N(k-1)})_{k \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées par la propriété de Markov Forte.

Par la loi forte des grands nombres et en reconnaissant une somme télescopique,

$$\frac{1}{k} S_{N(k)} = \frac{\sum_{j=1}^k S_{N(j)} - S_{N(j-1)}}{k} \rightarrow \mathbb{E}(S_N) > 0$$

Cela signifie que lorsque k tend vers l'infini, il en va de même pour $S_N(k)$ puisque le quotient tend à se stabiliser.

On vient donc de prouver que $\limsup (S_i) = +\infty$.
Symétriquement, on montre que $\liminf (S_i) = -\infty$.

□

Corollaire 3. *Supposons qu'on a défini $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors :*

1. *Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] < 0$ alors $X_n \rightarrow \infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.*
2. *Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] > 0$ alors $X_n \rightarrow \infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.*
3. *Si $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] = 0$ alors $\limsup X_n = \infty$ et $\liminf X_n = -\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Théorème 1 et du Lemme 3. □

3 Résultat faible de Sinai

Le but de cette partie va être de montrer un théorème dû à Y. Sinai. Grossièrement, ce résultat revient à dire que $|X_n|$ a en moyenne une progression majorée par $\ln(n)^2$, sous certaines conditions.

Plaçons-nous dans le cadre du résultat faible de Sinai. Observons dès lors la dérive de la marche vers les infinis. Pour ce faire, nous allons introduire la notion de famille tendue.

On dit qu'une famille $(\mu_i)_{i \in I}$ de mesures de probabilité sur \mathbb{R} est *tendue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subset \mathbb{R} \text{ compact}, \forall i \in I, \mu_i(K_\varepsilon^c) < \varepsilon.$$

Par extension, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue si la famille de mesure associée l'est. On remarquera que $(\mu_i)_{i \in I}$ est tendue si et seulement si il existe une sous-suite qui converge en loi.

Théorème 4. *(Résultat faible de Sinai)*

Supposons que $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)] = 0$ et que $\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}[\ln(\rho_0)^2] < \infty$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}^0 \left(|X_n| > \frac{\ln(n)^2}{\delta} \right) < \varepsilon.$$

En d'autres termes, $\frac{|X_n|}{\ln(n)^2}$ est une famille tendue.

Afin de prouver ce théorème, nous définissons le potentiel de l'environnement :

$$V(x) = \begin{cases} \sum_{y=1}^x \ln(\rho_y) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \sum_{y=x}^{-1} \ln(\rho_y) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Comme vu en introduction, le potentiel décrit le milieu et peut avoir une interprétation très qualitative. Imaginons que notre marche ait à franchir une chaîne de montagne. Une pente descendante en x - vers la droite - traduira une facilité (une plus grande probabilité) à aller vers la droite en partant de x , donc que $\omega_x^+ > \omega_x^-$ i.e. $\ln(\rho_x) < 0$: le potentiel baisse quand la pente descend. Inversement, il augmente quand la pente monte. Un point possédant un grand potentiel sera le sommet d'une montagne : en partant de 0, le point au potentiel nul, il sera dur d'y arriver. Un point au potentiel petit sera le fond d'une vallée, il sera plus aisé d'accès. Remarquons que $\gamma(y) = \exp(V(y))$. On peut alors réexprimer la fonction d'échelle de cette façon :

$$S_{a,b}(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \exp(V(y))}{\sum_{y=a}^{b-1} \exp(V(y))}.$$

Prenons $x = 1$ et $a = 0$. En faisant varier b , on observe la probabilité d'une excursion à droite de 0 jusqu'à b avant de regagner a .

De plus, $V(b) = \sum_{y=1}^b \ln(\rho_y)$ n'est jamais qu'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $Y_n = \ln(\rho_y)$ d'espérance $\mathbb{E}_P(\ln \rho_0)$ nulle et de variance $\mathbb{E}_P(\ln(\rho_0)^2)$ finie. Notons σ^2 cette variance. Par le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\frac{V(b)}{\sqrt{b}} \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Remarquons que le lemme suivant pourrait se prouver grâce à la convergence de la marche aléatoire $V(b)$ vers un mouvement brownien, mais nous n'aborderons pas cette notion.

Lemme 5. *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $b_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $b \geq b_0$ on a*

$$\mathfrak{P} \left(\bigcup_{b' \in \{1, \dots, b\}} \{V(b') > \delta \sqrt{b}\} \right) > 1 - \varepsilon.$$

Démonstration. Commençons par une remarque préliminaire, qui découle des observations précédentes :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \mathfrak{P} \left(V(b) > \delta \sqrt{b} \right) = G(\delta),$$

où $G(x) = 1 - \mathbb{F}_{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}(x)$. Plus tard, nous noterons \mathcal{N}_{σ^2} une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons introduire deux constantes, qui dépendent de ε , de manière a priori magique, mais dont l'utilité se révélera au cours de la

preuve!

Soit donc $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^{k_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et η tel que $\mathfrak{P}(\mathcal{N}_{\sigma^2} \leq 4\eta) \leq \frac{3}{4}$.
 Considérons, pour $b, M \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, k_\varepsilon\}$, les ensembles

$$A_i = \left\{ V\left(\frac{b}{M^i}\right) > \eta\sqrt{\frac{b}{M^i}} \right\},$$

$$G_i = \left\{ \forall j \in \{i, \dots, k_\varepsilon\}, V\left(\frac{b}{M^j}\right) > -\eta\sqrt{M}\sqrt{\frac{b}{M^j}} \right\}.$$

Notons $G = G_0$. On remarque que $G_i \subset G_{i+1}$.

La preuve va consister à regarder la probabilité des A_i^c en les regardant sur G et G^c .

Commençons par majorer la probabilité du complémentaire de G . On a que

$$\mathfrak{P}(G^c) \leq \sum_{j=0}^{k_\varepsilon} \mathfrak{P}\left(V\left(\frac{b}{M^j}\right) \leq -\eta\sqrt{M}\sqrt{\frac{b}{M^j}}\right).$$

Mais $\forall M \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}\left(V\left(\frac{b}{M^j}\right) \leq -\eta\sqrt{M}\sqrt{\frac{b}{M^j}}\right) \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathfrak{P}(\mathcal{N}_{\sigma^2} \leq -\eta\sqrt{M})$.

Donc, en choisissant b et M assez grand, $\mathfrak{P}\left(V\left(\frac{b}{M^j}\right) \leq -\eta\sqrt{M}\sqrt{\frac{b}{M^j}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2k_\varepsilon}$.
 Cela nous amène au fait que l'on peut choisir b et M tels que :

$$\mathfrak{P}(G^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Intéressons nous maintenant aux évènements A_i^c sur G . Nous allons maintenant montrer que pour b et M assez grands,

$$\forall i \in \{0, \dots, k_\varepsilon - 1\}, \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=i}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_i\right) \leq \frac{3}{4} \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=i+1}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_{i+1}\right).$$

Nous avons que, en notant $p = \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=i}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_i\right)$,

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{P}\left(\left\{V\left(\frac{b}{M^i}\right) \leq \eta\sqrt{\frac{b}{M^i}}\right\} \bigcap_{j=i+1}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_i\right) \\ &= \mathfrak{P}\left(\left\{V\left(\frac{b}{M^i}\right) - V\left(\frac{b}{M^{i+1}}\right) \leq \eta\sqrt{\frac{b}{M^i}} + \eta\sqrt{M}\sqrt{\frac{b}{M^{i+1}}}\right\} \cap_{j=i+1}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_i\right) \\ &= \mathfrak{P}\left(\left\{V\left(\frac{b}{M^i}\right) - V\left(\frac{b}{M^{i+1}}\right) \leq 2\eta\sqrt{\frac{b}{M^i}}\right\} \cap_{j=i+1}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_i\right) \quad (6) \end{aligned}$$

La ligne (6) vient du fait que le potentiel est une marche aléatoire : la différence du potentiel entre deux points est indépendante des valeurs du potentiel en chaque point. De plus, on a que

$$V\left(\frac{b}{M^i}\right) - V\left(\frac{b}{M^{i+1}}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} V\left(\frac{b}{M^i} - \frac{b}{M^{i+1}}\right).$$

Donc

$$\mathfrak{P}\left(\left\{V\left(\frac{b}{M^i}\right) - V\left(\frac{b}{M^{i+1}}\right) \leq 2\eta\sqrt{\frac{b}{M^i}}\right\}\right) = \mathfrak{P}\left(\left\{\frac{V\left(\frac{b}{M^i} - \frac{b}{M^{i+1}}\right)}{\sqrt{b\left(\frac{1}{M^i} - \frac{1}{M^{i+1}}\right)}} \leq 2\eta\sqrt{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^{-1}}\right\}\right).$$

Pour $M > 4$, $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^{-1}} \geq 2$. De plus,

$$\mathfrak{P}\left(\left\{\frac{V\left(\frac{b}{M^i} - \frac{b}{M^{i+1}}\right)}{\sqrt{b\left(\frac{1}{M^i} - \frac{1}{M^{i+1}}\right)}} \leq 4\eta\right\}\right) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \mathfrak{P}(\mathcal{N}_{\sigma^2} < 4\eta) \leq \frac{3}{4}.$$

On peut donc trouver b , $M \in \mathbb{N}$ assez grands tels que

$$(6) \leq \frac{3}{4} \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=i+1}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_i\right) \leq \frac{3}{4} \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=i+1}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G_{i+1}\right), \text{ car } G_i \subset G_{i+1}.$$

Par une récurrence aisée, nous pouvons en déduire que

$$\mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il ne reste plus qu'à assembler les résultats. Nous pouvons trouver b , M convenables tels que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k_\varepsilon} A_j^c\right) &= \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G\right) + \mathfrak{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k_\varepsilon} A_j^c \cap G^c\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \mathfrak{P}(G^c) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
1 - \varepsilon &\leq \mathfrak{P} \left(\bigcup_{j=0}^{k_\varepsilon} A_j \right) \\
&= \mathfrak{P} \left(\bigcup_{j=0}^{k_\varepsilon} \left\{ V \left(\frac{b}{M^j} \right) > \eta \sqrt{\frac{b}{M^j}} \right\} \right) \\
&\leq \mathfrak{P} \left(\bigcup_{j=0}^{k_\varepsilon} \left\{ V \left(\frac{b}{M^j} \right) > \delta \sqrt{b} \right\} \right), \text{ en posant } \delta = \frac{\eta}{\sqrt{M^{k_\varepsilon}}}, \\
&\leq \mathfrak{P} \left(\bigcup_{b' \in \{1, \dots, b\}} \left\{ V(b') > \delta \sqrt{b} \right\} \right),
\end{aligned}$$

ce qui termine le lemme. \square

Nous avons maintenant tous les outils afin de prouver le résultat faible de Sinai.

Démonstration. Soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4}$. Montrons que

$$\exists \delta > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}^0 \left(|X_n| > \frac{\ln(n)^2}{\delta} \right) < \varepsilon.$$

Notons

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\log^2(n)}{\delta} \\
G &= \left\{ \exists b'' \in \{-b, \dots, 0\}, V(b'') > \delta \sqrt{b} \right\} \\
D &= \left\{ \exists b' \in \{0, \dots, b\}, V(b') > \delta \sqrt{b} \right\} \\
A &= G \cap D.
\end{aligned}$$

On dit que la marche fait une excursion lorsque $|X_n|$ quitte 0, dérive puis revient en 0.

Notons les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{T_1\} \\
\forall k \geq 1, \tau_{k+1} &= \{\inf t \geq \sigma_k, X_t = 1\} \\
\forall k \geq 1, \sigma_k &= \{\inf t \geq \tau_k, X_t = 0\}.
\end{aligned}$$

Alors les excursions positives de la marche sont entre chaque τ_k et σ_k et les excursions négatives sont entre chaque σ_k et τ_{k+1} .

Remarquons qu'une excursion a une durée minimale de 1. Ainsi, pour montrer que $|X_n|$ dépasse $|b|$ avec faible probabilité, il suffit de montrer qu'avec forte probabilité, plus de n excursions seront nécessaires afin d'atteindre b ou $-b$ pour la première fois. Traduisons cela :

$$\mathbb{P}^0(\{T_b \leq n\} \cup \{T_{-b} \leq n\}) \leq \mathbb{P}^0(\{T_b \leq n\} \cap A) + \mathbb{P}^0(\{T_{-b} \leq n\} \cap A) + \mathfrak{P}(A^c)$$

On a $\mathfrak{P}(A^c) \leq 2\varepsilon$ d'après le lemme 6. En conséquence :

$$\mathbb{P}^0(\{T_b \leq n\} \cup \{T_{-b} \leq n\}) \leq \mathbb{P}^0(\{T_b \leq n\} \cap A) + \mathbb{P}^0(\{T_{-b} \leq n\} \cap A) + 2\varepsilon'$$

Soit $\omega \in A$. On note alors $Y_b = \inf \{k \mid \exists n \in \{\tau_k, \dots, \sigma_k\}, X_n = b\}$. On a que $\mathbb{P}_\omega(\{T_b \leq n\}) \leq \mathbb{P}_\omega(Y_b \leq n)$: pour b assez grand, si on l'atteint en moins de n étapes, on a fait moins de n excursions. De même, soit $Y_{-b} = \inf \{k \mid \exists n \in \{\sigma_k, \dots, \tau_{k+1}\}, X_n = -b\}$. On obtient que $\mathbb{P}_\omega(\{T_{-b} \leq n\} \cap A) \leq \mathbb{P}_\omega(Y_{-b} \leq n)$. Comme les τ_k et σ_k sont des temps d'arrêts, par la propriété de Markov forte, on peut considérer chaque nouvelle excursion positive comme début de la marche, en conséquence $\mathbb{P}_\omega(Y_b = 1) = \mathbb{P}_\omega^1(T_b < T_0)$. Ainsi,

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}_\omega(Y_b = k) = P_\omega^1(T_b < T_0)(1 - P_\omega^1(T_b < T_0))^{k-1}.$$

Ce qui donne :

$$\mathbb{P}(Y_b \leq n) = 1 - (1 - \mathbb{P}_\omega^1(T_b < T_0))^n \leq n\mathbb{P}_\omega^1(T_b < T_0).$$

Par le lemme 6, on sait que $\mathbb{P}_\omega^1(T_b < T_0) \leq \exp\left(-\frac{\delta}{\sqrt{\delta}} \log n\right) = \frac{1}{n^{\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}}}$. Donc

$$\mathbb{P}_\omega(Y_b \leq n) \leq \frac{1}{n^{\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}-1}}.$$

Symétriquement, on montre également que

$$\mathbb{P}_\omega(Y_{-b} \leq n) \leq \frac{1}{n^{\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}-1}}.$$

Finalement, on obtient :

$$\mathbb{P}_\omega(\{T_b \leq n\} \cup \{T_{-b} \leq n\}) \leq \frac{1}{n^{\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}-1}} + \frac{1}{n^{\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}-1}} + 2\varepsilon.$$

On peut alors choisir δ tel qu'on ait $\mathbb{P}_\omega(\{T_b \leq n\} \cup \{T_{-b} \leq n\}) \leq 4\varepsilon$. Donc $\mathbb{P}^0\left(|X_n| > \frac{\ln(n)^2}{\delta}\right) < \varepsilon$ et alors $\frac{|X_n|}{\ln(n)^2}$ est une famille tendue. \square

Le résultat sur l'éloignement de la **MAMA** est finalement montré! Nous avons donc répondu globalement aux deux grands axes. Cependant, il reste d'autres questions qui sont à ce jour non résolues. Par exemple, si l'on revient au problème du conducteur ivre de B. Schapira [3], on se souvient que les rues étaient orientées de manière déterministe. Si maintenant on décide que l'orientation se fait aléatoirement et indépendamment entre rues, on ne sait toujours pas dire si la marche est récurrente... On peut aussi se diriger vers d'autre phénomène du même genre, comme les **PAPAS** (voir [1])!

Références

- [1] F.Pene. Les papas. <http://images.math.cnrs.fr/Les-PAPAS>, 2012.
- [2] Sidney I. Resnick. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhauser, 1992.
- [3] B. Schapira. Des marches aléatoires pas comme les autres. <http://images.math.cnrs.fr/Des-marches-aleatoires-pas-comme>, 2011.
- [4] Ya. G. Sinai. The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium. *Theory of Probability and its Applications*, 1982.
- [5] F. Solomon. Random walks in a random environment. *Ann. Proba.*, 3(1), 1975.
- [6] Wikipédia. Marche aléatoire. http://fr.wikipedia.org/wiki/Marche_aleatoire.